

II. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1. Сила и плотность тока

Опред. Ток – направленное движение зарядов (заряженных частиц). Заряженные частицы, которые могут свободно перемещаться, называются носителями тока. За направление тока условились принимать направление движения положительных частиц.

Если напряженность электрического поля $\vec{E} = 0$, то в металле носители тока принимают участие в хаотическом тепловом движении со скоростью:

$$\langle \vec{v} \rangle_{\text{тепл.дв.}} = 0; \quad \langle |v| \rangle_{\text{тепл.дв.}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m}} \cong 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В действительности эта скорость на порядок больше, так как для электронов надо пользоваться не классическим распределением Максвелла, а квантовой статистикой Ферми-Дирака.

При $\vec{E} \neq 0$ возникает направленное движение электронов со скоростью:

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \langle \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \rangle - \text{скорость упорядоченного движения электрических зарядов.}$$

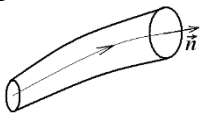
Плотность тока $\vec{j} = \rho \vec{u}$, где ρ – плотность свободных зарядов.

Медь Cu – металл, хороший проводник с $\mu_{\text{Cu}} = 63 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$. Если предположить, что на каждый атом приходится 1 свободный электрон, то число свободных электронов в 1 г меди

$$n'_{\text{Cu}} = \frac{N_A}{\mu_{\text{Cu}}} \cong 10^{22} \frac{1}{\text{г}}. \quad 8,9 \text{ г меди занимают } 1 \text{ см}^3 \Rightarrow n_{\text{Cu,мет}} = 10^{29} \frac{1}{\text{м}^3} - \text{концентрация электронов в}$$

металле, а плотность свободного заряда $\rho = ne = 10^{10} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$.

Опред. Количественной характеристикой электрического тока, называемой силой тока, является величина заряда, переносимого через (сквозь) рассматриваемую поверхность в единицу времени:



$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S \vec{j} d\vec{s} - (\text{поток плотности тока через поверхность } S).$$

В максимуме молнии сила тока $\sim 10^4 \text{ А}$, учитывая, что за одну вспышку молнии на Землю переносится заряд $\sim (20 \div 30) \text{ Кл}$, можно оценить время сбегания заряда по проводящему шнуру $\tau_{\text{молнии}} = (2 \div 3) \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Вычислим убыль заряда в произвольном объеме V :

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = -\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} d\vec{s} = \int_V \text{div } \vec{j} \cdot dV \Rightarrow \int_V (\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) \cdot dV = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Уравнение непрерывности: } \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

линии плотности тока \vec{j} начинаются и кончаются в местах изменения плотности заряда во времени.

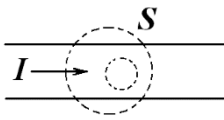
$$\text{Закон сохранения заряда: } \oint_S \vec{j} d\vec{s} = I_0 = -\frac{dq}{dt} - \text{ток через замкнутую поверхность равен}$$

убыли заряда внутри неё.

Эти 2 уравнения входят в неявном виде в систему уравнений Максвелла.

2. Постоянный ток. Электродвижущая сила

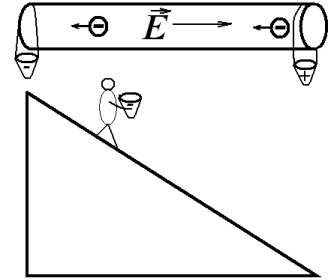
Если ток стационарный, то есть не зависит от времени, то суммарный ток, протекающий через любую замкнутую поверхность, охватывающую или пересекающую проводник, равен 0



$$\oint_S \vec{j} d\vec{s} = 0 = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow -\frac{d}{dt} \int \rho \cdot dV = \int \text{div } \vec{j} \cdot dV \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0 \Rightarrow$$

Линии стационарного (постоянного) тока замкнуты. Плотность заряда проводника, несущего постоянный ток, постоянна во времени.

Если поместить проводник в однородное электрическое поле \vec{E} , как показано на рисунке, то электроны придут в движение и соберутся на левом конце провода в таком количестве, чтобы создать в проводнике $\vec{E}_\Sigma = 0$, после чего ток прекратится. Если хотим поддерживать ток, то надо «собирать» избыточные электроны и переносить их на другой конец, так как в силу нулевого поля внутри провода сами электроны на положительно заряженный конец не побегут. Таким образом, для поддержания тока должна существовать сторонняя неэлектрическая сила \vec{F}^* .



Сторонние силы – силы неэлектрического происхождения, обеспечивающие движение положительных носителей на участках увеличения потенциала.

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q} \text{ – напряженность поля сторонних сил.}$$

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} \text{ – работа сторонних сил над единичным положительным зарядом называется}$$

электродвижущей силой ЭДС.

$$[\varepsilon] = \frac{B}{m} \cdot m = B.$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, есть циркуляция вектора напряженности поля сторонней силы:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}^* d\vec{l}.$$

В произвольной точке цепи на заряд q действует суммарная сила:

$$\vec{F}_\Sigma = q \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Работа этой силы на участке 12:

$$A_{12} = \int_1^2 d\vec{l} \cdot q \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*) = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}).$$

Опред. $\varepsilon_{12} + \varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}$ – падение напряжения или напряжение на участке 1-2.

Если $\varepsilon_{12} = 0$, то участок цепи однородный (участок цепи, на котором не действует ЭДС, называется однородным).

Для однородного участка цепи напряжение равно разности потенциалов на его концах

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

3. Закон Ома. Сопротивление проводников

1. Закон Ома.

В 1826 году школьный учитель Г.С.Ом опубликовал свои экспериментальные результаты по пропусканию тока через проволоки разной толщины и длины при разных температурах. Будучи сыном слесаря и талантливым исследователем, Ом самостоятельно изготавливал нужные ему проволоки и поочередно варьировал каждый фактор. В результате им были сделаны следующие выводы:

1) Сила тока, текущего по однородному участку металлического проводника, пропорциональна падению напряжения на этом участке

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} \text{ – для однородного участка.}$$

2) Коэффициент пропорциональности между током и напряжением ($U = RI$) называется сопротивлением проводника R .

Сопротивление проводника зависит от его формы, размеров и материала $R = f(\text{форма, размеры, материал})$.

Сопротивление однородного цилиндрического проводника прямо пропорционально его длине и обратно пропорционально площади его поперечного сечения $R = \rho \frac{l}{S}$.

ρ – удельное сопротивление проводника – характеристика материала, из которого изготовлен проводник.

За единицу измерения сопротивления в системе СИ принят 1 Ом – сопротивление проводника, по которому при напряжении 1 В течет ток 1 А.

Но это было потом, а когда Ом опубликовал свои результаты, они были встречены насмешками соотечественников. Вердикт министра просвещения Германии был таков: «Физик, проповедующий подобную ересь, не достоин преподавать естественные науки». Ом вынужден был уйти с работы и жил в нищете. Лишь спустя 22 года после того, как его работа была высоко оценена французской Академией наук, Ом получил должность профессора Мюнхенского университета. Впоследствии открытому им закону и единице измерения сопротивления было присвоено его имя.

2. Дифференциальная форма закона Ома для однородного участка цепи.

$$dU_{12} = Edl;$$

$$j \cdot dS \text{ – ток через сечение } dS;$$

$$jdS \cdot \rho \frac{dl}{dS} = Edl \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{E} = \rho \vec{j} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{array} \right\} \text{ – дифференциальная форма закона Ома для однородного}$$

участка цепи. Здесь ρ – удельное сопротивление, σ – удельная проводимость проводника.

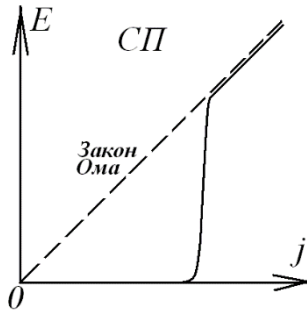
The diagram shows a horizontal rectangular wire segment. The length of the segment is labeled as dl and the cross-sectional area is labeled as dS .

3. Удельное сопротивление различных материалов.

По проводящим свойствам (σ) твердые материалы делятся следующим образом:

$$\text{Изоляторы} \xrightarrow{10^{-8}} \text{полупроводники} \xrightarrow{10^6} \text{металлы} \xrightarrow{10^8} \text{гиперпроводники} \xrightarrow{10^{10}} \text{сверхпроводники} \xrightarrow{\sigma: \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}}$$

Не следует думать, что открытый для проводников закон Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ представляет собой универсальную для всех материалов и единственно возможную связь \vec{j} и \vec{E} .



На рисунке представлена вольт-амперная характеристика (ВАХ) сверхпроводника СП. Закон Ома начинает работать после перехода проводника из СП в нормальное (проводящее) состояние.

Можно оценить скорость направленного движения носителей

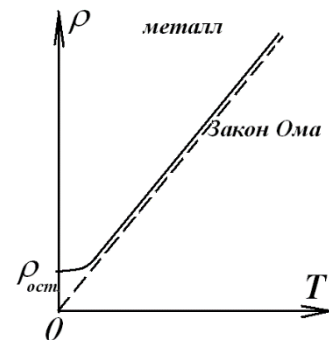
тока

$$\langle u \rangle = \begin{cases} 1 \frac{M}{c} & \text{в СП} \\ 1 \frac{MM}{c} & \text{в мет.} \end{cases}, \text{ то есть } \langle u \rangle \ll \langle v \rangle, \text{ где } \langle u \rangle - \text{ скорость направленного движения.}$$

В металлах сопротивление обусловлено рассеиванием электронов e на:

- фононах – колебаниях решетки;
- примесях;
- атомах (ионах решетки).

При возрастании температуры удельное сопротивление металлов увеличивается, соответственно, их проводимость уменьшается.



В СП носителями тока являются электронные пары, которые возникают в результате электрон-фононного взаимодействия, и реализуется принципиально другой (чем в проводниках) механизм протекания тока. Его основной принцип: «Кто нам мешает, тот нам поможет». Этот «кто» – фононы или колебания решетки: пролетая сквозь решетку положительных ионов, электрон заставляет ионы смещаться во след, а смещенный ион увлекает за собой следующий электрон, связывая таким образом электроны в пару. Очевидно, что подобная модель проводимости может быть реализована при минимальном уровне хаотического теплового движения, поэтому низкотемпературная СП наблюдается при температурах T порядка нескольких К (температурах жидкого гелия 4,2 К).

Вот какой токнесущей способностью (плотностью тока j_{\max}) обладают различные материалы:

$$\text{СП в поле } E = 1 \frac{\text{мкВ}}{\text{м}} = 10^{-6} \frac{\text{В}}{\text{м}} \text{ имеет критическую (максимальную) } j_c = 10^9 \div 10^{10} \frac{\text{А}}{\text{м}^2};$$

$$\text{гиперпроводник ГП } j_{\max} = 10^8 \div 10^9 \frac{\text{А}}{\text{м}^2};$$

$$\text{хороший проводник Си } j_{\max} \cong 10^6 \div 10^7 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Вопрос. Со СП понятно: ограничение возникает потому, что слишком большая плотность тока может разрушить СП состояние. Но откуда берутся j_{\max} для ГП и меди, ведь их ВАХ в соответствии с законом Ома линейные и не имеют экстремумов?

Ответ. Все дело в том, что кроме закона Ома есть закон Джоуля-Ленца.

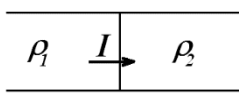
4. Заряд внутри однородного проводника с постоянным током

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 = \oint_S \sigma \vec{E} d\vec{S} \quad \text{для однородно проводника} = \sigma \oint_S \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho dV = 0, \text{ то есть избыток заряда}$$

внутри однородного проводника с постоянным током равен нулю.

Следовательно, избыток заряда может появиться только на поверхности однородного проводника в местах его соприкосновения с другими проводниками или в местах, где проводник имеет неоднородности.

Пример.



$$\rho_2 > \rho_1 \quad \frac{E_1}{\rho_1} = j_1 = j_2 = \frac{E_2}{\rho_2} \Rightarrow E_2 > E_1 \Rightarrow \text{на границе раздела должен быть}$$

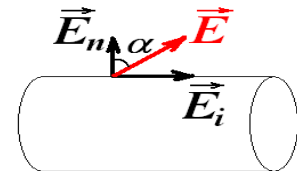
положительный заряд. На микроскопическом языке это можно понять так: *e* бегут справа налево, в среде с меньшим удельным сопротивлением ρ_1 им бежать легче и они убегают, а положительный заряд остается на границе раздела. Если ток потечет справа налево, то граница будет заряжена отрицательно.

5. Электрическое поле проводника с током

Если токи стационарные, то распределение электрического заряда не изменяется во времени, хотя и происходит движение заряда: в любой точке на место уходящих зарядов “прибегают” новые. Эти движущиеся заряды создают такое же кулоновское поле, как и неподвижные заряды той же конфигурации \Rightarrow электрическое поле стационарных токов – потенциальное. Разница в том, что в электростатике \vec{E}_i неподвижных зарядов внутри проводников равно нулю, а у стационарных токов $\vec{E}_i \neq 0 \Rightarrow$ у поверхности проводника с постоянным током поле направлено под углом к поверхности, а не перпендикулярно к ней, как в электростатике.

$$\begin{cases} E_n = \frac{\sigma_{нов}}{\epsilon_0 \epsilon} - \text{избыточный поверхностный заряд} \\ E_\tau = E_i \end{cases}$$

При $j = 0 \quad \alpha = 0, \vec{E} \perp$ поверхности проводника.



6. Закон Ома для неоднородного участка цепи

$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$ – дифференциальная форма закона Ома для неоднородного участка.

Пусть ток течет вдоль тонких проводов или трубки тока.

Трубка тока удовлетворяет следующим условиям.

- В любом сечении, перпендикулярном трубке, $\vec{j}, \sigma, \vec{E}, \vec{E}^* = const$.
- $\vec{j}, \vec{E}, \vec{E}^*$ – направлены по касательной к трубке тока.
- Заряды не пересекают боковую поверхность трубки.

При этом поперечное сечение трубки тока может меняться.

Получим интегральную форму закона Ома для неоднородного участка цепи

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^* \Big|_{d\vec{l}}$$

Проинтегрируем это равенство по длине участка цепи от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}^*) d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = \int_1^2 \frac{\rho \cdot \vec{j}}{S} \cdot S d\vec{l} = I \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} = IR_{12} \Rightarrow$$

$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ – интегральная форма закона Ома для неоднородного участка цепи.

I и ε – алгебраические величины:

$I > 0$ если течет от 1 к 2;

$I < 0$ если течет от 2 к 1;

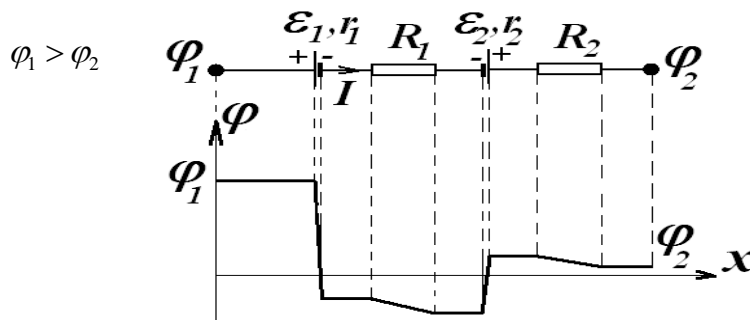
$\varepsilon_{12} > 0$, если она перемещает положительные носители в выбранном направлении;

$\varepsilon_{12} < 0$, если она препятствует движению положительных носителей в выбранном направлении.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}$$

При $\varphi_1 = \varphi_2$ имеем $I = \frac{\varepsilon}{R}$ – закон Ома для замкнутой цепи.

Пример.



7. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

1. Правила Кирхгофа.

Правило I:

для любого узла алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю $\sum_{k=1}^n I_k = 0$.



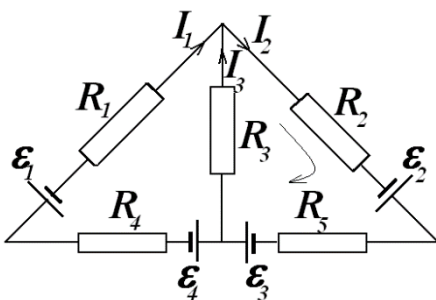
$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 = \sum_{k=1}^n I_k$$

для пост. тока

Если узлов N , то имеем $(N - 1)$ уравнений.

Правило II: $\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_n$ для любого замкнутого контура.

2. Порядок реальных действий:



1). Обозначаются токи на всех участках цепи и для $(N - 1)$

узла записывается I правило Кирхгофа: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

2). Задается направление обхода контуров.

3). Для каждого выбранного контура записывается II правило Кирхгофа: $I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_2 R_5 + I_1 R_4 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$

$$I_2 R_2 + I_2 R_5 + I_3 R_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ε приписывают знак “+”, если направление обхода контура совпадает с движением от “-” к “+” в пределах источника.

4). Значения токов находятся при решении полученной системы уравнений.

8. Закон Джоуля-Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи постоянного тока, на концах которого напряжение U .

За время t через любое сечение протекает заряд $I \cdot t = q$, то есть такой заряд переносится с одного конца на другой.

Вопрос. Кем переносится?

Ответ. Силой $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}^*)$.

Вопрос. Какую работу совершает при этом данная сила?

Ответ. $A = q \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}^*) d\vec{l} = I \cdot t \cdot U \Rightarrow$

\Rightarrow мощность $P = \frac{A}{t} = IU \Rightarrow$

$P = I \cdot U = I(\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12})$ – мощность тока на неоднородном участке цепи.

Она расходуется на нагрев участка, химические реакции, может быть на перемещение участка в пространстве.

Удельная мощность – отношение мощности, выделившейся в объеме ΔV , к этому объему:

$$P_{\text{уд}} = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Если проводник неподвижный и участок цепи однородный, то мощность является тепловой, при этом за время t в проводнике выделяется теплота

$$Q = t \cdot P = I \cdot U \cdot t = I^2 R t.$$

Для переменного тока

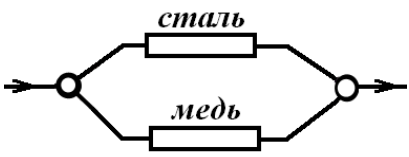
$$Q = \int_0^t R I^2 dt.$$

$$dQ = R I^2 dt = \frac{\rho \cdot dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho \cdot j^2 dV dt;$$

$P_{\text{уд. тепл.}} = \rho \cdot j^2$ – удельная тепловая мощность тока.

$P_{\text{уд.}} = \rho \cdot j^2 = \sigma \cdot E^2$ – закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Пример.

а)  $\rho_{\text{Cu}} < \rho_{\text{ст}} \Rightarrow R_{\text{Cu}} < R_{\text{ст}} \Rightarrow P_{\text{Cu}} = \frac{U^2}{R_{\text{Cu}}} > P_{\text{ст}} = \frac{U^2}{R_{\text{ст}}}.$

$$P_{\text{уд. Cu}} = \frac{E^2}{\rho_{\text{Cu}}} > P_{\text{уд. ст}} = \frac{E^2}{\rho_{\text{ст}}}.$$

б)  $P_{\text{уд. Cu}} = j^2 \cdot \rho_{\text{Cu}} < P_{\text{уд. ст}} = j^2 \cdot \rho_{\text{ст}}.$